

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ МИЗЕСА — СМИРНОВА

А. И. ОРЛОВ

Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения. Для проверки гипотезы о совпадении функции распределения η_i с $F(x)$ применяют ([1], стр. 130) статистику

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x),$$

где $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi(x, \eta_i); \quad \chi(x, \eta) = \begin{cases} 1, & \eta \leq x, \\ 0, & \eta > x. \end{cases} \quad (1)$$

Статистика ω_n^2 , предложенная Мизесом, изучалась Н. В. Смирновым ([2], [6], см. также обзор [33]). В дальнейшем считаем, что гипотеза верна, т. е. $\eta_i, i = 1, \dots, n$, имеют непрерывную функцию распределения $F(x)$. Полезна следующая лемма из [2].

Лемма 1. *Закон распределения ω_n^2 не зависит от вида непрерывной функции $F(x)$.*

В силу леммы 1 без ограничения общности будем считать, что $F(x)$ — функция равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. Введем эмпирический процесс

$$\xi_n(x) = \sqrt{n} (F_n(x) - x). \quad (2)$$

Как известно, конечномерные распределения $\xi_n(x)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi(x)$ — гауссовского процесса на $[0, 1]$, такого, что $M\xi(x) = 0$, $M\xi(x)\xi(y) = x(1-y)$ при $x \leq y$; $\xi(y)$ — условный вичеровский процесс при условии $\xi(1) = 0$. В соответствии с эвристическим подходом Дуба [34] распределение $\omega_n^2 = \int_0^1 \xi_n^2(x) dx$ сходится ([29], [3], стр. 635) к распределению

$$\omega^2 = \int_0^1 \xi^2(x) dx. \quad (3)$$

Функция распределения ω^2 впервые табулирована в [4] (см. также [1], таблица 6.4а).

Положим

$$\Delta_n = \sup_{-\infty < z < \infty} |\mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} - \mathbf{P}\{\omega^2 < z\}|. \quad (4)$$

О ц е н к а. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $b(\varepsilon)$, что при всех n

$$\Delta_n < b(\varepsilon) n^{-a+\varepsilon}. \quad (5)$$

Впервые степенная оценка скорости сходимости распределения ω_n^2 к пределу была получена В. В. Сазоновым, доказавшим справедливость (5) сначала [7] для $a = 1/10$, а затем [8] для $a = 1/6$. Используя представление Скорохода [30] последовательности независимых случайных величин с помощью значений винеровского процесса в случайные моменты времени, Розенкранц [9] доказал (5) для $a = 1/5$. Следуя по тому же пути, Я. Ю. Никитин [13] и Кифер [14] независимо друг от друга доказали оценку (5) при $a = 1/4$ для некоторого класса статистик, в который входит ω_n^2 . Они же установили, что метод Скорохода не позволяет получить (5) для $a > 1/4$. В предварительном сообщении [10] автора a было увеличено до $1/3$. Настоящая работа посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема. Оценка (5) справедлива при $a = 1/2$ и несправедлива при $a > 1$.

Для доказательства разработан специальный подход, отличающийся как от подхода Сазонова, так и от подхода Розенкранца — Никитина — Кифера. Характерным для него является использование неравенства Чебышева, формулы Стирлинга, многомерного обобщения разложения Эйлера — Маклорена, т. е. возврат к начальным методам теории вероятностей (ср. [23]).

Статистики типа ω^2 широко применяются во многих областях [33]. Например, для проверки принадлежности функции распределения выборки параметрическому семейству $F(x|\theta)$ рассматривают ([21], [32]) статистику

$$n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x|\theta_n))^2 dF(x|\theta_n),$$

где θ_n — оценка истинного значения параметра θ . В частности составлены таблицы для критерия нормальности ([35], [16]). Статистики типа ω^2 используют для проверки совпадения функций распределения нескольких выборок ([37], [39], [36]), независимости координат ([31], [42]), симметрии распределения ([27], [40]), равномерности распределения на окружности [41] и т. д.

Подход, изложенный в настоящей работе, позволяет получать оценки скорости сходимости вида (5) для широкого класса статистик типа ω^2 . Поскольку рассуждения довольно пространны, автору представляется полезным подробно изложить их в простейшем случае статистики ω_n^2 . Некоторые дальнейшие результаты приведены в [18], [19]. Отметим, что для введенного в [19] класса статистик оценка (5) верна при $a = 1/2$, а для некоторых типичных представителей этого класса оценка (5) не верна при $a > 1/2$. В дополнение к [18], [19] укажем, что оценка (5) при $a = 1/2$

верна для статистик типа ω^2 , применяемых для проверки нормальности [35], [16].

В теореме не говорится о значениях a из интервала $(1/2, 1]$. По мнению автора, верна одна из следующих двух гипотез.

I. Оценка (5) неверна при $a > 1/2$ (Розенкранц [9]).

II. Оценка (5) верна при $a = 1$. В пользу этой гипотезы говорят некоторые численные результаты [43].

В процессе доказательства теоремы эмпирического процесс $\xi_n(x)$ приближается кусочно постоянным процессом, промежутки постоянства которого не зависят от случая. Введем точки разбиения $d_i = \frac{2i-1}{2m}$, $i = 1, \dots, m$, и оператор A , действующий на функции, определенные на $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} Af(x) &= f(d_i) \text{ при } d_i - \frac{1}{2m} \leq x < d_i + \frac{1}{2m}, \\ Af(1) &= f(d_m). \end{aligned}$$

Имеем следующие равенства:

$$\omega_n^2 = \int_0^1 A\xi_n^2(x) dx + \int_0^1 (\xi_n^2(x) - A\xi_n^2(x)) dx, \quad (6)$$

$$\omega^2 = \int_0^1 A\xi^2(x) dx + \int_0^1 (\xi^2(x) - A\xi^2(x)) dx. \quad (7)$$

Мы покажем, что вторые слагаемые в (6) и (7) малы, и оценим их; оценим расхождение между распределениями первых слагаемых; пользуясь свободой в выборе m , закончим доказательство оценки (5) для $a = 1/2$. Отметим, что разложения вида (6), (7) играют важную роль в предельной теории статистик интегрального типа [28].

1. Постоянно будет использоваться простая лемма, вытекающая из неравенства Чебышева.

Лемма 2. Пусть все моменты случайной величины ξ конечны. Тогда для любых $\alpha, \beta > 0$ можно выбрать такое $c(\alpha, \beta)$, что при всех $x > 0$ выполнено неравенство

$$P\{|\xi| > x^\beta\} < \frac{c(\alpha, \beta)}{x^\alpha}.$$

С помощью формулы (1) после некоторых вычислений и рассуждений образец которых приведен ниже, доказывается следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq 1$. Тогда $M\xi_n(x_1) \xi_n(x_2) \dots \xi_n(x_k)$ — многочлен от $x_1, x_2, \dots, x_k$, степень и коэффициенты которого ограничены константами, зависящими лишь от k (но не от n). Многочленом является и $M\xi(x_1) \xi(x_2) \dots \xi(x_k)$.

Обозначим

$$\delta(n, m) = \int_0^1 (\xi_n^2(x) - A\xi_n^2(x)) dx.$$

Лемма 4. Существуют константы $h(s)$, $s = 1, 2, \dots$, такие, что при всех n выполнены неравенства

$$M\delta^{2s}(n, m) < \frac{h(s)}{m^{2s}}.$$

Аналогичные неравенства верны и для второго слагаемого в (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Меняя порядок интегрирования, по теореме Фубини получаем

$$M\delta^{2s}(n, m) = \sum_K \int M \prod_{j=1}^{2s} (\xi_n^2(x_j) - \xi_n^2(a_j)) dx_1 \dots dx_{2s}, \quad (8)$$

где K — куб с центром $a = (a_1, \dots, a_{2s})$ и длиной ребра $1/m$; каждое из $a_j, j = 1, \dots, 2s$, является одной из точек разбиения $d_i, i = 1, \dots, m$. Сумма берется по всем m^{2s} наборам из $2s$ точек разбиения. Если $a_i = a_k$, то будем говорить, что соответствующие переменные x_i и x_k входят в одну группу. Все $x_j, j = 1, \dots, 2s$, разбиваются на несколько групп и свободные переменные, которыми без ограничения общности можно считать $x_1, \dots, x_t$. Каждая свободная переменная в одиночку образует группу. Подинтегральное выражение в (8) равно

$$\Sigma (-1)^{\alpha} f(y_1, \dots, y_{2s}), \quad (9)$$

где

$$f(y_1, \dots, y_{2s}) = M \xi_n^2(y_1) \dots \xi_n^2(y_{2s}),$$

$y_j = x_j$ или $y_j = a_j, \alpha$ — число $a_j, j = 1, \dots, 2s$, среди аргументов, сумма берется по всем 2^{2s} возможным наборам y_j . Если y_i и y_k входят в разные группы, то их упорядоченность не зависит от принимаемых значений, если в одну — то зависит. Функция f инвариантна относительно перестановок аргументов. Если $y_j, j = 1, \dots, 2s$, упорядочены по возрастанию, то f по лемме 3 является многочленом.

Проинтегрируем в (8) сначала по свободным переменным, зафиксировав остальные и обозначив их значения $g = (y_{t+1}, \dots, y_{2s})$. Разложим $f(y_1, \dots, y_{2s}) = f(y_1, \dots, y_t, g)$ как функцию от $y_1, \dots, y_t$ по многомерной формуле Тейлора в точке $(a_1, \dots, a_t)$. Ряд будет конечным. Члены, в которые не входит хотя бы одна свободная переменная, например, $x_1 - a_1$, сократятся, так как вместе с $f(x_1, y_2, \dots, y_t, g)$ в сумму (9) входит с противоположным знаком и $f(a_1, y_2, \dots, y_t, g)$. Члены, в которые хотя бы одна из разностей $x_i - a_i, i = 1, \dots, t$, входит в нечетной степени, при интегрировании дадут 0 из-за симметрии куба. Таким образом, главный член равен

$$\int B(g) (x_1 - a_1)^2 (x_2 - a_2)^2 \dots (x_t - a_t)^2 dx_1 \dots dx_t.$$

Поскольку $B(g)$ получается из $f(y_1, \dots, y_{2s})$ дифференцированием по некоторым переменным, то $B(g)$ — многочлен от $y_{t+1}, \dots, y_{2s}$, степень и коэффициенты которого ограничены константами, зависящими лишь от s . То же верно для степеней и коэффициентов многочленов от g , являющихся коэффициентами в разложении f как функции $y_1, \dots, y_t$. Число членов разложения ограничено константой, зависящей лишь от s . Будем рассматривать лишь главный член — для остальных рассуждения аналогичны. Проинтегрировав его, получим $B(g) (12)^{-t} m^{-3t}$.

Оставшееся под интегралом в (8) выражение отличается от (9) лишь заменой $f(y_1, \dots, y_{2s})$ на $B(g) (12)^{-t} m^{-3t} = B(y_{t+1}, \dots, y_{2s}) (12)^{-t} m^{-3t}$ и

соответствующим уменьшением числа переменных. Область интегрирования разобьем на части, в которых упорядоченность $2(2s - t)$ чисел $x_{t+1}, \dots, x_{2s}, a_{t+1}, \dots, a_{2s}$ не меняется. Число частей зависит лишь от s . Рассмотрим одну из них. Рассмотрим переменные одной группы, обозначив остальные z и зафиксировав их. По формуле Тейлора получим, что $B(g)$ равно сумме слагаемых вида $C(z)(x_i - a_i) + \dots$, где $C(z)$ — многочлены, обладающие теми же свойствами ограниченности параметров, что и $B(g)$, а число слагаемых зависит лишь от s . К многочленам $C(z)$ применимо предыдущее рассуждение. При рассмотрении переменных очередной группы в каждом слагаемом выявляется хотя бы один множитель типа $(x_i - a_i)$, где переменная x_i относится к рассматриваемой группе. Перебрав все группы и проинтегрировав, окончательно получим, что слагаемое в (8), имеющее t свободных переменных и q групп более чем из одного переменного, не превосходит $Hm^{-q-2t-2s}$, где константа H зависит лишь от s . Число способов, которыми можно $2s$ переменных разбить на t свободных и q групп, зависит лишь от s , число соответствующих слагаемых при каждом способе равно A_m^{t+q} , что меньше m^{t+q} . Следовательно, сумма их не превосходит Hm^{-2s-t} , что и доказывает лемму 4. Рассмотрев случай $a_1 = a_2 = \dots = a_{2s}$, убедимся, что заменить $2s$ в правых частях неравенств леммы на большие числа нельзя.

Аналогично проводится доказательство для второго слагаемого в (7).

2. В дальнейшем $m = m(n) = C[n^\alpha]$, где C — натуральная константа, $\alpha \leq \alpha_0 < \frac{1}{2}$, квадратные скобки обозначают целую часть числа. Константы в получаемых ниже оценках зависят от α_0 , кроме специально оговоренных случаев.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x(i) &= \xi_n(d_i), \quad i = 1, \dots, m, \\ y(i) &= \sqrt[m]{m}(x(i+1) - x(i)), \quad i = 1, \dots, m-1, \\ y(0) &= \sqrt[m]{m}x(1), \\ y(m) &= -\sqrt[m]{m}x(m), \\ \gamma(n, m) &= \frac{1}{\sqrt[m]{m}} \sum_{i=0}^m y^3(i). \end{aligned} \tag{10}$$

Лемма 5. Все моменты $y(i)$, $i = 0, \dots, m$, существуют и ограничены константами, не зависящими от i , m , n и α_0 .

Используя неравенство

$$P\{\max_{0 \leq i \leq m} |y(i)| > x\} \leq \sum_{i=0}^m P\{|y(i)| > x\}$$

и леммы 2 и 5, доказываем следующее утверждение.

Лемма 6. Для любых $\alpha, \beta > 0$ существует $c_1(\alpha, \beta)$, такое, что при всех n, m

$$P\{\max_{0 \leq i \leq m} |y(i)| > n^\alpha\} < \frac{c_1(\alpha, \beta)}{n^\beta}.$$

Лемма 7. Все моменты $\gamma(n, m)$ существуют и ограничены константами, не зависящими от n, m и α_0 .

Леммы 3, 5 и 7 доказываются аналогично, поэтому приведем лишь более трудное доказательство леммы 7.

а. Имеем:

$$M\gamma^{2s}(n, m) = m^{-s} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{2s}=0}^m M y^3(k_1) y^3(k_2) \dots y^3(k_{2s}). \quad (11)$$

Некоторые из индексов k_i в (11) могут совпадать. Число способов разбиения $2s$ индексов на группы совпадающих (в группе может быть и один индекс) зависит лишь от s . Рассмотрим одно из таких разбиений, число групп равных индексов в котором есть a . Ему в (11) соответствует $m(m-1)\dots(m-a+1)$ слагаемых. Для доказательства леммы 7 достаточно показать, что каждое из них не превосходит $b(s)m^{s-a}$, где $b(s)$ зависит лишь от s .

б. Рассмотрим для простоты только случай, когда ни одно из k_i не равно 0 или m . Положим $v(j, i) = \chi(d_{j+1}, \eta_i) - \chi(d_j, \eta_i) - \frac{1}{m}$, тогда (см. (1), (2), (10))

$$y(j) = \sqrt{\frac{m}{n}} \sum_{i=1}^n v(j, i).$$

Каждое слагаемое из (11) равно сумме

$$\Sigma M v(k_1, i_1) v(k_1, i_2) v(k_1, i_3) v(k_2, i_4) \dots v(k_{2s}, i_{6s}) \quad (12)$$

(индексы $i_j, j = 1, \dots, 6s$, пробегает все целые значения от 1 до n), умноженной на $m^{3s}n^{-3s}$. Из независимости наблюдений $\eta_1, \dots, \eta_n$ и того, что $Mv(i, j) = 0$, следует, что отличными от 0 могут быть лишь те выражения в (12), где все индексы разбиты на группы равных, и в каждой группе не менее двух индексов. Каждое математическое ожидание в (12) разбивается на произведение членов, относящихся к одному и тому же η . Как легко подсчитать (все $r(1), \dots, r(b)$ различны),

$$M v^{\alpha(1)}(r(1), i) \dots v^{\alpha(b)}(r(b), i) = \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{m} \right)^{\alpha(1) + \dots + \alpha(b)} \times \\ \times \{(1-m)^{\alpha(1)} + \dots + (1-m)^{\alpha(b)} + m - b\}. \quad (13)$$

в. Индексы в (12) можно разбить на группы равных числом способов, зависящим только от s , поэтому достаточно показать, что сумма Σ' по каждому такому разбиению не превосходит $b_1(s)m^{s-a}$. Пусть в разбиении c групп равных индексов. В Σ' входит $n(n-1)\dots(n-c+1)$ слагаемых. Из (11), (12), (13) и того, что m^2n^{-1} ограничено, следует, что каждое слагаемое из Σ' не превосходит по модулю

$$b_2(s) n^{-c} m^{-9s+c+\sum_{j=1}^c \beta(j)},$$

где $\beta(j)$ — максимальное из $\alpha(\cdot)$ в j -й группе (см. (13)). Методом математической индукции можно доказать, что показатель степени m максимален

в случае некоторого разбиения индексов на пары (т. е. $s = 3s$). Пары бывают «чистые» $Mv^2(r, i)$, для которых $\beta = 2$, и «смешанные» $Mv(r_1, i) \times \times v(r_2, i)$, для которых $\beta = 1$. Таким образом, каждое слагаемое из (11) не превосходит $b_3(s) m^{-\sigma}$, где σ равно минимальному числу «смешанных» пар. Если число элементов в группе равных индексов из (11) нечетно, то есть хотя бы одна «смешанная» пара с индексом из этой группы. Легко проверить, что количество групп с нечетным числом элементов не меньше $2(a - s)$, чем завершается доказательство леммы 7.

3. Вероятность того, что из n наблюдений в $\left[0, \frac{1}{2m}\right)$ попало k_0 , в $\left[\frac{1}{2m}, \frac{3}{2m}\right)$ попало $k_1, \dots$, в $[d_i, d_{i+1})$ попало $k_i, \dots$, в $\left[1 - \frac{1}{2m}, 1\right]$ попало k_m , находится по формуле для мультиномиального распределения ([11], п. 6.3).

$$p(k_0, k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_0! k_1! \dots k_m!} \left(\frac{1}{m}\right)^{k_1 + \dots + k_{m-1}} \left(\frac{1}{2m}\right)^{k_0 + k_m}. \quad (14)$$

Известна следующая формула Стирлинга ([12], п. 469):

$$a! = \sqrt{2\pi a} \left(\frac{a}{e}\right)^a \exp\left(\frac{1}{12a} - \frac{\theta(a)}{360a^3}\right), \quad 0 < \theta(a) < 1. \quad (15)$$

С помощью (1), (2) и (10) выразим k_i через $y(i)$. Используя (15), преобразуем (14):

$$\begin{aligned} p(k_0, k_1, \dots, k_m) &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} 2m^{-\frac{m+1}{2}} \left\{ \left(1 + 2\sqrt{\frac{m}{n}} y(0)\right)^{-k_0 - \frac{1}{2}} \left(1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\frac{m}{n}} y(1)\right)^{-k_1 - \frac{1}{2}} \dots \left(1 + \sqrt{\frac{m}{n}} y(m-1)\right)^{-k_{m-1} - \frac{1}{2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + 2\sqrt{\frac{m}{n}} y(m)\right)^{-k_m - \frac{1}{2}} \right\} \exp\left(-\sum_{i=0}^m \frac{1}{12k_i}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^m \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{\theta(n)}{360n^3} + \sum_{i=0}^m \frac{\theta(k_i)}{360k_{i3}}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Условный винеровский процесс $\xi(x)$ имеет в точке $X = (x(1), \dots, \dots, x(m))$ плотность (см. (10))

$$\begin{aligned} f(X) &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} 2m^{-\frac{m+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(2y^2(0) + \right. \\ &\quad \left. + y^2(1) + \dots + y^2(m-1) + 2y^2(m))\right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим точки $(x(1), \dots, x(m))$, такие, что $\sqrt{nx}(i) + nd_i$, $i = 1, \dots, m$ — целые и $x^2(1) + \dots + x^2(m) < m z$. Вероятность

$$p_{nm}(z) = \mathbf{P}\left\{\int_0^1 A\xi_n^2(x) dx < z\right\}$$

получается суммированием (16) по всем таким точкам. Выделим кубы с центрами в этих точках, ребра которых параллельны осям координат и

имеют длину $1/\sqrt{n}$. Объединение этих кубов обозначим S_0 . Тогда $p_{nm}(z)$ можно получить интегрированием по S_0 функции $\bar{f}(x(1), \dots, x(m))$, постоянной в каждом кубе и равной в нем $p(k_0, k_1, \dots, k_m) n^{m/2}$, где k_i , $i = 0, 1, \dots, m$, определяют центр куба. Вероятность же

$$P\left\{\int_0^1 A\xi^2(x) dx < z\right\}$$

получается интегрированием плотности (17) по шару $x^2(1) + x^2(2) + \dots + x^2(m) < mz$.

Положим ($\rho > 0$)

$$A(\rho) = \{\max_{0 \leq i \leq m} |y(i)| < n^\rho, \quad |\gamma(n, m)| < n^\rho\}.$$

Из лемм 6 и 7 следует, что $1 - P(A(\rho))$ убывает быстрее любой степени n . Для любой системы S кубов обозначим $S_1 = S_1(\rho)$ объединение тех кубов из S , которые полностью лежат в $A(\rho)$.

Для всех точек $A(\rho)$ последний множитель в (16) равен $1 + O(1/n)$. Прологарифмируем заключенную в фигурные скобки часть (16), разложим логарифмы в ряды и просуммируем:

$$\begin{aligned} \ln\{\cdot\} = & -\sqrt{\frac{n}{m}} \sum_{j=0}^m y(j) - \frac{1}{2} \{2y^2(0) + y^2(1) + \dots + y^2(m-1) + 2y^2(m)\} + \\ & + \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^i (-\lambda(j)y(j))^i \left\{\frac{1}{2i} - \frac{\lambda(j)y^2(j)}{(i+1)(i+2)}\right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\lambda(j) = 1$ для $j = 1, \dots, m-1$ и $\lambda(j) = 2$ для $j = 0, m$. Первая сумма в (18) равна 0, вторая — аргументу экспоненты в (17), третья представляют собой отклонение от предельного распределения. Разложив $1/k_i$ в ряд, получим для центров $X = (x(1), \dots, x(m))$ кубов из $A(\rho)$ равенство

$$\begin{aligned} f(X) = f(X) \exp \left\{ \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^i (-\lambda(j)y(j))^i \left(\frac{1}{2i} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\lambda(j)y^2(j)}{(i+1)(i+2)} - \frac{1}{12} \mu\left(i, \frac{1}{\lambda(j)y^2(j)}\right)\right) \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mu(1, z) = 0$, $\mu(i, z) = z$ при $i > 1$.

4. Из неравенства

$$|e^x - 1| < 2|x| \quad \text{при} \quad |x| < \frac{1}{2}$$

и определения $A(\rho)$ следует, что (19) остается верным при замене верхней границы суммирования по i на $l = l(\alpha_0)$ вместо ∞ .

Разложим экспоненту в (19) в ряд.

Лемма 8. Для всех центров $X = (x(1), \dots, x(m))$ кубов из S_1 выполнено равенство

$$\bar{f}(X) = f(X) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^l \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i g(i, m) \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad (20)$$

где $g(i, m)$, $i = 1, \dots, l$, являются многочленами от $y(0), y(1), \dots, y(m)$ степень которых зависит лишь от i , а коэффициенты могут зависеть еще и от m . Константа в $O(1/n)$ одна и та же для всего S_1 . Для любого $\delta > 0$ найдется $h(\delta)$, такое, что $|g(i, m)| < h(\delta) n^\delta$ при $i = 1, \dots, l$ на всем $S_1 \subset A(\rho)$, где $\rho = \rho(\delta)$.

Приведем лишь основную идею доказательства. Разложение в ряд экспоненты в (19) состоит из слагаемых вида (с точностью до числовых коэффициентов и $\lambda(j)$)

$$\left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^{q(1)+\dots+q(k)} \sum_{i(1), \dots, i(k)=1}^m y^{\sigma(1)}(i(1)) \dots y^{\sigma(k)}(i(k)),$$

что является произведением соответствующих сумм по отдельным индексам. Для любого $\tau > 0$ найдется $H(\tau)$, такое, что сумма по $i(j)$ не превосходит $H(\tau) m^{2q(j)} n^{-q(j)+\tau}$. Это утверждение при $q(j) \geq 2$ следует из леммы 6, а при $q(j) = 1$ — из леммы 7 и того, что сумма всех $y(i)$ равна 0.

Опишем многомерный аналог асимптотического разложения Эйлера — Маклорена (ср. одномерный случай с изложением [12], стр. 542). Пусть T — множество точек с целыми координатами p -мерного линейного пространства. Решеткой назовем множество $hT + a$, где положительное число h — шаг решетки, вектор a определяет положение одной из вершин решетки. Будем изучать сумму значений функции $g(x)$, $x = (x^1, \dots, x^p)$, по подмножеству A точек решетки. Функция $g(x)$ предполагается достаточное число раз дифференцируемой. Опишем переход от суммы к асимптотическому разложению по степеням h .

С каждой точкой решетки свяжем куб с центром в этой точке, ребра которого параллельны осям координат и имеют длину h . Таким образом с точкой $(a^1, \dots, a^p)$ связан куб $\left\{x: a^i - \frac{h}{2} \leq x^i < a^i + \frac{h}{2}\right\}$. Кубы, связанные с точками решетки, заполняют пространство без пропусков и наложений. Коэффициентами в многомерном аналоге асимптотического разложения Эйлера — Маклорена по степеням h являются интегралы от производных функции $g(h)$ по объединению кубов, связанных с точками A .

Пусть x_0 — центр куба B . Разложим $g(x)$ по многомерной формуле Тейлора в точке x_0 . Для демонстрации метода выпишем лишь члены с первыми четырьмя производными:

$$g(x) = g(x_0) + \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} D_x^k g(x_0) + \dots, \quad (21)$$

где

$$D_x^k g(x_0) = \left(\sum_{i=1}^p (x^i - x_0^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k g(x) \Big|_{x=x_0}.$$

Проинтегрируем почленно обе части (21) по кубу B . Интегралы тех слагаемых, в которые хотя бы одно приращение переменных $x^i - x_0^i$ входит в нечетной степени, равны 0 в силу симметрии куба, который отображается на себя при замене переменных $x_1^j = x^j$, $j \neq i$, $x_1^i = 2x_0^i - x^i$. Таким

образом,

$$g(x_0)h^p = \int_B g(x) dx - \frac{h^2}{24} \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial (x^i)^2} h^p - \\ - \frac{h^4}{3456} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^p \frac{\partial^4 g(x_0)}{\partial (x^i)^2 \partial (x^j)^2} h^p - \frac{h^4}{1920} \sum_{i=1}^p \frac{\partial^4 g(x_0)}{\partial (x^i)^4} h^p - \dots \quad (22)$$

К каждому слагаемому в правой части (22) можно применить аналогичное преобразование. Так, например,

$$\frac{\partial^2 g(x_0)}{\partial (x^i)^2} h^p = \int_B \frac{\partial^2 g(x)}{\partial (x^i)^2} dx - \frac{h^2}{24} \sum_{j=1}^p \frac{\partial^4 g(x_0)}{\partial (x^i)^2 \partial (x^j)^2} h^p - \dots \quad (23)$$

Подставим (23) в (22):

$$g(x_0)h^p = \int_B g(x) dx - \frac{h^2}{24} \sum_{i=1}^p \int_B \frac{\partial^2 g(x)}{\partial (x^i)^2} dx + O(h^4)h^p. \quad (24)$$

Действуя аналогично, для любого l можно получить асимптотическое разложение с остаточным членом порядка $h^{2l} \cdot h^p$.

Весьма важным для дальнейшего является тот факт, что в описанное разложение не входят частные производные, в которых дифференцирование хотя бы по одному из x_i , $i = 1, \dots, p$, производится нечетное число раз, в результате чего при больших p существенно сокращается число слагаемых в суммах при h^{2s} , $s = 1, 2, \dots$. Предложенные другими авторами многомерные обобщения формулы Эйлера — Маклорена не обладают этим полезным свойством (см. [20], [22], [24], [38]).

Распределение случайного вектора $(\xi_n(d_1), \dots, \xi_n(d_m)) = \xi$ сосредоточено в точках решетки $\frac{1}{V_n} T + a$ в m -мерном пространстве, где $a = (n^{-1/2}([nd_1] - nd_1), \dots, n^{-1/2}([nd_m] - nd_m))$. Вероятность того, что ξ попадет в объединение кубов S , равна

$$\sum_S \bar{f}(x(1), \dots, x(m)) \left(\frac{1}{V_n} \right)^m, \quad (24')$$

где значения $\bar{f}$ берутся в центрах кубов. Воспользуемся равенством (20) — применим асимптотическую формулу Эйлера — Маклорена в многомерном случае к каждому слагаемому в правой части (20), рассматриваемому в соответствии с (10) как функция $(x(1), \dots, x(m))$. Как указано при доказательстве леммы 8, с точностью до числового множителя слагаемые имеют вид

$$\prod_{i=0}^m y^{\alpha_i}(i) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\lambda(i) y^2(i)) \right\}, \quad (25)$$

где $\lambda(i) = 1$, $i = \overline{1, m-1}$, $\lambda(0) = \lambda_m = 2$, α_i — целые неотрицательные. Из (10) следует, что для любой дважды дифференцируемой функции g

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2(i)} = m \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2(i-1)} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial y(i-1) \partial y(i)} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2(i)} \right]. \quad (26)$$

Легко видеть, что функции (25) разлагаются в равномерно сходящиеся в кубе из S , в центре которого берется разложение, бесконечные ряды Тейлора (m и n фиксированы). Следовательно, почленное интегрирование по кубу законно. Проводя его, получим бесконечный ряд, несколько первых членов которого выписано в (22). Сделаем замену по формуле (26) и воспользуемся явным видом (25) слагаемых из (20). Мы получим, что перед суммой $2k$ -х производных по y в бесконечном ряду стоит множитель $m^k h^{2k} = m^k n^{-k}$, число участвующих в этой сумме производных не более $4^k m^k$, каждая из производных берется от функций вида (25). Пользуясь тем, что степени слагаемых в (20) ограничены, и явным видом сомножителей в (25), можно показать, что для любого $\tau > 0$ существуют $H(\tau)$ и n_0 , такие, что для любого слагаемого вида (25), участвующего в (20), сумма $2k$ -х производных в (22) не превосходит (при условии $x \in A(\rho)$, $\rho = \rho(\tau)$)

$$a_k = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m H(\tau) \left(\frac{m^2}{n} \right)^k n^{\tau(n_0+2k)} f(x(1), \dots, x(m)).$$

Поскольку $m = C[n^\alpha]$, $\alpha \leq \alpha_0 < 1/2$, то существует такое k_0 , что $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k = O(n^{-1}) f(x(1), \dots, x(m))$. Из (20) и (22) получаем, сгруппировав члены с одной и той же степенью n в качестве множителя, что

$$\sum_{S_1} \bar{f}(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m = \int_{S_1} f(X) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^l \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i g(i, m) \right\} dX \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \\ + \frac{m^2}{n} \sum_{S_1} \left(\sum_{i=0}^{k_0} g_1(i, m) \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i f(X) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad (27)$$

где $X = (x(1), \dots, x(m))$, $g_1(i, m)$ являются многочленами от $y(0), y(1), \dots, y(m)$, степень которых зависит лишь от i , а коэффициенты могут зависеть еще и от m .

Лемма 9. Для любого $\delta > 0$ найдется $h_1(\delta)$, такое, что $|g_1(i, m)| < h_1(\delta) n^\delta$ при $i = 0, 1, \dots, k_0$ для всех точек $(y(0), \dots, y(m))$ из $A(\rho)$ при некотором $\rho = \rho(\delta)$.

Для доказательства отметим, что все слагаемые в (20) можно разбить на два класса. В первый входят те, что получаются при разложении экспоненты из произведений вида

$$h(y(0), \dots, y(m)) = \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=0}^m y^3(i) \right)^k y^{\alpha_0}(0) \dots y^{\alpha_m}(m), \quad (28)$$

а во второй — все остальные. Как в лемме 8, для слагаемых из второго класса утверждение леммы 9 можно получить исходя из того, что $\max \{|y(i)|, i = 0, \dots, m\}$ растет медленнее любой степени n . Для функций, у которых множитель перед $f(y(0), \dots, y(m))$ имеет вид (28), это рассуждение проходило бы, если бы перед суммой стоял множитель m^{-1} ,

а не $m^{-1/2}$. Воспользуемся равенством

$$\frac{\partial h(y(0), \dots, y(m))}{\partial y(j)} f(y(0), \dots, y(m)) = \sum_{s=0}^k C_s^k \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m y^3(i) \right)^{k-s} \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^m y^{\alpha_q}(q) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial y(j)} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{m}} y^3(j) \right)^s y^{\alpha_j}(j) f(y(0), \dots, y(m)) \right]. \quad (29)$$

Из лемм 6, 7 следует, что $h(y(0), \dots, y(m))$ растет медленнее любой степени n . Равенство (29) показывает, что множитель перед $f(y(0), \dots, y(m))$ во всех производных функции $h(y(0), \dots, y(m)) f(y(0), \dots, y(m))$ также растет медленнее любой степени n . Используя ограниченность степеней $g(i, m)$ в (20) и явный вид производных функций вида (25), завершаем доказательство леммы 9.

В правой части формулы (27) стоит умноженная на $m^2 n^{-1}$ сумма значений некоторой функции по центрам кубов. Поступим с ней так же, как действовали только что с суммой в (24'). В результате получим, что

$$\sum_{S_1} \bar{f}(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m = \int_{S_1} f(X) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{l_1} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i g_2(i, m) \right\} dX \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right) + \\ + \left(\frac{m^2}{n} \right)^2 \sum_{S_1} \left(\sum_{i=0}^{k_1} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i g_3(i, m) f(X) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right). \quad (30)$$

Аналогично предыдущему можно показать, что $g_2(i, m)$ и $g_3(i, m)$ обладают теми же свойствами, что $g(i, m)$ и $g_1(i, m)$. Отметим, что в правой части (30) перед суммой по центрам кубов стоит множитель $m^4 n^{-2}$, в то время как в (27) был множитель $m^2 n^{-1}$.

Повторяя описанные выше преобразования некоторое конечное число раз, при каждом из которых увеличивается на единицу степень множителя $m^2 n^{-1}$ перед суммой по центрам кубов в правых частях формул, аналогичных (27) и (30), получим, что

$$\sum_{S_1} \bar{f}(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m = \int_{S_1} f(X) dX \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{l_s} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i g_s(i, m) \right\} \times \\ \times \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right) + O\left(\frac{1}{n} \right) \sum_{S_1} f(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m. \quad (31)$$

Воспользовавшись положительностью функции $f(X)$, явным видом ее производных и оценив по модулю все члены в формуле (22) для $f(X)$, начиная со второго, получим, что

$$\sum_{S_1} f(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m = \int_{S_1} f(X) dX + o(1) \sum_{S_1} f(X) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^m.$$

Следовательно, в правой части формулы (31) сумму по центрам кубов можно и не писать. Подытожим результаты рассуждений настоящего пункта в следующей лемме 10.

Лемма 10. *Существуют многочлены $\tilde{g}(i, m)$, $i = 1, \dots, \tilde{l}$, от переменных $y(0), y(1), \dots, y(m)$, степень которых зависит лишь от i , а коэффициенты могут зависеть еще и от m , такие, что*

$$\sum_{S_1} \tilde{f}(X) \left(\frac{1}{V^n} \right)^m = \int_{S_1} f(X) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(V \frac{m^2}{n} \right)^i \tilde{g}(i, m) \right\} dX \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right). \quad (32)$$

Для любого $\delta > 0$ существует $h(\delta)$, такое, что $|\tilde{g}(i, m)| < h(\delta) n^\delta$ при $i = 1, \dots, \tilde{l}$ на всем S_1 , где $S_1 = S \cap A(\rho)$, причем S — любое объединение кубов решетки, $\rho = \rho(\delta)$. Константа в $O(n^{-1})$ зависит лишь от ρ , но не от S .

5. Перейдем к оцениванию Δ_n из (4). Как показал Ю. В. Прохоров [15], функции $P\{\omega_n^2 > z\}$ равномерно по n убывают экспоненциально быстро при $z \rightarrow \infty$. Столь же быстро убывает, естественно, и предельная функция $P\{\omega^2 > z\}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно рассматривать супремум не по $(-\infty, \infty)$, а по $[0, n]$, что и будем делать в дальнейшем.

Обозначим $T(z)$ шар $x^2(1) + \dots + x^2(m) < mz$. Обозначим $S_0 = S_0(z)$ объединение кубов, центры которых лежат в $T(z)$. Отметим, что для двух точек одного куба суммы $x^2(1) + \dots + x^2(m)$ отличаются не более чем на

$$2n^{-1/2}(x(1) + \dots + x(m)) + mn^{-1}. \quad (33)$$

Лемма 11. *Для любого $\delta > 0$ существуют $\kappa(n, m)$ и Δz , такие, что*

$$\begin{aligned} \sum_{S_0} \tilde{f}(X) \left(\frac{1}{V^n} \right)^m &= \int_{T(z)} f(X) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(V \frac{m^2}{n} \right)^i \tilde{g}(i, m) \right\} dX + \\ &+ O\left(\frac{1}{n} \right) + \kappa(n, m) \int_{T(z+\Delta z) \setminus T(z-\Delta z)} f(X) dX, \end{aligned} \quad (34)$$

причем $|\kappa(n, m)| < h_1(\delta) n^\delta$, $0 < \Delta z < h_2(\delta) n^{\delta-1/2}$ при некоторых константах $h_1(\delta)$, $h_2(\delta)$, постоянная в $O(n^{-1})$ не зависит от $z \in [0, n]$.

Доказательство. Положим $B(\rho) = \{\max_{1 \leq i \leq m} |x(i)| < n^\rho\}$. Для любой системы S кубов, связанных с точками решетки, для любого $\rho > 0$ пусть S_2 — объединение тех кубов из S , которые полностью лежат в $A(\rho) \cap B(\rho)$. Очевидно, что лемма 10 остается верной при замене S_1 на S_2 . В преобразованной таким образом лемме 10 положим $S = S_0$. Поскольку вероятность попадания случайного вектора $(\xi_n(d_1), \dots, \xi_n(d_m))$ в область $\overline{A(\rho)} \cup \overline{B(\rho)}$ по леммам 6,3 убывает быстрее любой степени n , то формула (32) остается справедливой, если слева суммирование производится по S_0 , а справа интегралы берутся по S_2 .

Сравним теперь предельную (т. е. задаваемую плотностью $f(X)$) вероятность попадания в построенную по S_0 систему кубов S_2 и в область $T(z) \cap A(\rho) \cap B(\rho)$. Пусть S^* — объединение кубов из S_0 , среди точек которых некоторые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений $\max_{1 \leq i \leq m} |y(i)|, i = 0, \dots, m\} = n^\rho, \max_{1 \leq i \leq m} |x(i)| = n^\rho$. Ясно, что предельная

вероятность S^* убывает быстрее любой степени n , поскольку

$$S^* \subset \left\{ \max_{0 \leq i \leq m} |y(i)| > n^\rho - \sqrt{\frac{m}{n}} \right\} \cup \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} |x(i)| > n^\rho - \sqrt{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Вследствие (33) при $\Delta z = 2n^{-1/z+\rho} + n^{-1}$ справедливы включения

$$\{T(z - \Delta z) \cap A(\rho) \cap B(\rho) \setminus S^*\} \subset S_2 \subset \{T(z + \Delta z) \cap A(\rho) \cap B(\rho)\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & |\mathbf{P}(S_2) - \mathbf{P}(T(z) \cap A(\rho) \cap B(\rho))| \leq \mathbf{P}(T(z + \Delta z)) - \\ & - \mathbf{P}(T(z - \Delta z)) + \mathbf{P}(S^*) = \int_{\{T(z+\Delta z) \setminus T(z-\Delta z)\} \cap A(\rho) \cap B(\rho)} f(X) dX + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Поскольку $\left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i \tilde{g}(i, m) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ при достаточно малом ρ , причем равномерно по $A(\rho) \cap B(\rho)$, то

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} f(X) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\tilde{\tau}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i \tilde{g}(i, m) \right\} dX = \\ & = \int_{T(z) \cap A(\rho) \cap B(\rho)} f(X) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\tilde{\tau}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}}\right)^i \tilde{g}(i, m) \right\} dX + \\ & + \kappa(n, m) \int_{\{T(z+\Delta z) \setminus T(z-\Delta z)\} \cap A(\rho) \cap B(\rho)} f(X) dX + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\kappa(n, m)$ и Δz имеют требуемые свойства. Поскольку $|y(i)| < 2\sqrt{m}\sqrt{z} < 2n^{3/4}$ в $T(z)$, а $\mathbf{P}\{T(z) \setminus (A(\rho) \cap B(\rho))\}$ убывает быстрее любой степени n , правые части (34) и (35) отличаются на интегралы по областям $T(z) \setminus (A(\rho) \cap B(\rho))$ и $\{T(z + \Delta z) \setminus T(z - \Delta z)\} \setminus \{A(\rho) \cap B(\rho)\}$, подынтегральными функциями в которых являются умноженные на $f(X)$ многочлены от $y(0), y(1), \dots, y(m)$, удовлетворяющие перечисленным в лемме 10 условиям, то правые части (34) и (35) отличаются на $O(n^{-1})$. Лемма 11 доказана.

Нам будет полезна легко проверяемая лемма 12.

Лемма 12. Если $\mathbf{P}\{|\xi - \eta| > \varepsilon\} < \delta$, то

$$\mathbf{P}\{\eta < x - \varepsilon\} - \delta < \mathbf{P}\{\xi < x\} < \mathbf{P}\{\eta < x + \varepsilon\} + \delta$$

при всех x .

Из явного вида характеристической функции случайной величины ω^2 (см., например, [3], с. 635) и теоремы об обращении интеграла Фурье (см., например, [5], с. 584) следует лемма 13.

Лемма 13. Распределение ω^2 имеет ограниченную непрерывную плотность.

Перейдем непосредственно к оцениванию разности $\mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} - \mathbf{P}\{\omega^2 < z\}$. Из лемм 4 и 2 следует, что для любого $\gamma > 0$ существуют $d(\gamma)$, такие, что вторые слагаемые в правых частях (6) и (7) не превосходят $d(\gamma) m^{-1} n^\gamma$ на множестве A , таком, что $\mathbf{P}(A) > 1 - O(n^{-1})$. Применив лемму 12 с $\delta = 1 - \mathbf{P}(A)$ и $\varepsilon = d(\gamma) m^{-1} n^\gamma$ к $\xi = \omega_n^2, \eta = \int_0^1 A \xi_n^2(t) dt$,

получим, что

$$\sum_{S_0(z-\varepsilon)} \bar{f}(X) \left(\frac{1}{Vn} \right)^m - \delta < P\{\omega_n^2 < z\} < \sum_{S_0(z+\varepsilon)} \bar{f}(X) \left(\frac{1}{Vn} \right)^m + \delta. \quad (36)$$

Применив лемму 12 с теми же ε и δ к $\xi = \omega^2$ и $\eta = \int_0^1 A\xi^2(t) dt$, получим, что

$$\int_{T(z-\varepsilon)} f(X) dX - \delta < P\{\omega^2 < z\} < \int_{T(z+\varepsilon)} f(X) dX + \delta. \quad (37)$$

Нам понадобится следующий факт: если $a < b < c$ и $d < e < f$, то $b - e = \theta(c - d) + (1 - \theta)(a - f)$, где $0 < \theta < 1$. Используя его в (36) и (37), получим, что

$$P\{\omega_n^2 < z\} - P\{\omega^2 < z\} = \theta \left(\sum_{S_0(z+\varepsilon)} \bar{f}(X) \left(\frac{1}{Vn} \right)^m - \int_{T(z+\varepsilon)} f(X) dX \right) + (1 - \theta) \left(\sum_{S_0(z-\varepsilon)} \bar{f}(X) \left(\frac{1}{Vn} \right)^m - \int_{T(z-\varepsilon)} f(X) dX \right) + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (38)$$

Применив лемму 12 с теми же ε и δ , что и раньше, к $\xi = \int_0^1 A\xi^2(t) dt$ и $\eta = \omega^2$, получим, что

$$P\{\omega^2 < z - \varepsilon\} - \delta < \int_{T(z)} f(X) dX < P\{\omega^2 < z + \varepsilon\} + \delta. \quad (39)$$

Из леммы 13 и (39) следует, что для Δz из леммы 11

$$\int_{T(z+\Delta z)} f(X) dX - \int_{T(z)} f(X) dX = \theta_1 C_1 \varepsilon, \quad (40)$$

где $|\theta_1| < 1$, C_1 — некоторая константа, ε — то же, что в (36).

Для $i = 1, \dots, l$ положим

$$K(z, i, m) = \int_{T(z)} \tilde{g}(i, m) f(X) dX.$$

Для нас окажется важным, что $K(z, i, m)$ не зависит явно от n . Используя (40) и равенство

$$T(z) = \{T(z) \cap A(\rho)\} \cup \{T(z) \setminus A(\rho)\},$$

аналогично доказательству леммы 11 получаем, что для любого $\beta > 0$ и того же ε , что и в (36),

$$K(z, i, m) - K(z + \varepsilon, i, m) = \theta_2 c_1(\beta) n^\beta \varepsilon, \quad (41)$$

$$|K(z, i, m)| < c_2(\beta) n^\beta, \quad (42)$$

для $i = 1, \dots, l$, где $|\theta_2| < 1$, $\theta_2 = \theta_2(i, z, m)$, $c_1(\beta)$ и $c_2(\beta)$ — некоторые константы, зависящие от β .

Используя лемму 11, формулы (38), (40) и (41), доказываем следующую лемму.

Лемма 14. При $z \in [0, n]$ для любого $\beta > 0$ существует $c(\beta)$, такое, что

$$\mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} - \mathbf{P}\{\omega^2 < z\} = \sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i K(z, i, m) + \theta(n, m, z) c(\beta) n^\beta m^{-1} + O(n^{-1}), \quad (43)$$

где $|\theta(n, m, z)| < 1$, константа в $O(n^{-1})$ не зависит от z , функции $K(z, i, m)$, $i = 1, \dots, \tilde{l}$, удовлетворяют условию (42).

6. Предыдущие рассуждения справедливы для $m = m(n) = c[n^\alpha]$, где $\alpha \leq \alpha_0$, $\alpha_0 < \frac{1}{2}$ — некоторое фиксированное число. Так, например, $\tilde{l} = \tilde{l}(\alpha_0)$. Выбор α_0 , а затем α и C находится в нашем распоряжении. Пусть α_0 достаточно близко к $1/2$, в частности, $\alpha_0 > 1/3$.

Можно проверить, что из-за симметрии шара $T(z)$ член с $i = 1$ в (43) исчезает. Выбирая α так, чтобы $m^2 n^{-1}$ и m^{-1} имели один и тот же порядок по n (т. е. $\alpha = 1/3$), доказываем теорему 1 из [10]:

Лемма 15. Оценка (5) верна при $a = 1/3$.

Воспользуемся свободой в выборе m . Положим $m = C[n^{\alpha_0}]$. Правая часть (43) есть $O(n^{-1/s+\varepsilon})$ по лемме 15. Поскольку $\alpha_0 > 1/3$, то $m^{-1} = o(n^{-1/3})$ и порядок суммы в правой части (43) тот же, что и всей правой части:

$$\sum_{i=1}^{\tilde{l}} \left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i K(z, i, m) = O(n^{-1/s+\varepsilon}). \quad (44)$$

Тогда каждое слагаемое в левой части (44) также есть $O(n^{-1/s+\varepsilon})$. Действительно, положим $C = 1, 2, 2^2, \dots, 2^{\tilde{l}-1}$ и рассмотрим соотношения (44) в каждом из этих $\tilde{l}$ случаев. С помощью конечного числа арифметических действий с левыми частями соотношений получим, что

$$\left(\sqrt{\frac{m^2}{n}} \right)^i K(z, i, m) = O(n^{-1/s+\varepsilon}). \quad (45)$$

(Тут мы пользуемся тем, что $K(z, i, m)$ не зависят явно от n .) Выразив n через m , получим, что $K(z, i, m)$ есть $O(m^{\lambda(i)})$, где

$$\lambda(i) = -\frac{1}{3\alpha_0} + i \left(\frac{1}{2\alpha_0} - 1 \right) + \frac{\varepsilon}{\alpha_0}. \quad (46)$$

Пусть $\lambda_1(i) = -\frac{1}{3\alpha_0} + i \left(\frac{1}{2\alpha_0} - 1 \right)$. Положим $K_1(z, i, m) = m^{-\lambda_1(i)} K(z, i, m)$, если $\lambda_1(i) < 0$ и $K_1(z, i, m) = K(z, i, m)$ в противном случае. В новых обозначениях формула (43) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\omega_n^2 < z\} - \mathbf{P}\{\omega^2 < z\} &= \sum_{i=1}^{\tilde{l}} m^{b(i)} n^{-i/2} K_1(z, i, m) + \\ &+ \theta(n, m, z) c(\beta) n^\beta m^{-1} + O(n^{-1}), \end{aligned} \quad (47)$$

где $b(i) = i + \lambda_1(i)$, если $\lambda_1(i) < 0$ и $b(i) = i$ в противном случае. Из-за произвольности $\varepsilon > 0$ в формулах (45), (46) $K_1(z, i, m)$, как и

$K(z, i, m)$, удовлетворяют условию (42). Каждое слагаемое суммы в (47) есть $O(n^{-1/i})$ при $m = [n^{\alpha_0}]$. При $m = [n^{\alpha}]$, $\alpha < \alpha_0$, множитель при первом слагаемом $m^{b(i)} n^{-1/2}$ будет убывать медленнее множителей у других слагаемых, поскольку $b(i) > b(1) = (6\alpha_0)^{-1}$ при $i = 2, \dots, \tilde{l}$. Выберем α так, чтобы $m^{b(i)} n^{-1/2}$ и m^{-1} имели одинаковый порядок по n , т. е. положим

$$\alpha = \frac{1}{2(b(1) + 2)} = \frac{3\alpha_0}{6\alpha_0 + 1}.$$

Получим, что оценка (5) верна при $a = a_1$, где $a_1 = \alpha > 1/3$. (Отметим, что $\alpha \rightarrow 0,375$ при $\alpha_0 \rightarrow 1/2$.)

Повторим рассуждения, проведенные с начала настоящего пункта, заменив $a_0 = 1/3$ на a_1 . Именно, при $\alpha_0 > a_1$ для $m = [n^{\alpha_0}]$ вместо (44) получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^{\tilde{l}} m^{b(i)} n^{-i/2} K_1(z, i, m) = O(n^{-\alpha_1 + \varepsilon}). \quad (48)$$

Аналогично доказательству (45) получаем, что каждое слагаемое в (48) имеет тот же порядок, что и вся сумма. Выражая n через m , получаем, что $K_1(z, i, m)$ есть $O(m^{\lambda^{(1)}(i)})$, где

$$\lambda^{(1)}(i) = -\frac{a_1}{\alpha_0} + \frac{i}{2\alpha_0} - b(i) + \frac{\varepsilon}{\alpha_0}.$$

Пусть $\lambda_1^{(1)}(i) = \lambda^{(1)}(i) - \frac{\varepsilon}{\alpha_0}$. Положим $K_2(z, i, m) = m^{-\lambda_1^{(1)}(i)} K_1(z, i, m)$, если $\lambda_1^{(1)}(i) < 0$, и $K_2(z, i, m) = K_1(z, i, m)$ в противном случае. Затем получим формулу, отличающуюся [от (47) заменой $b(i)$ на $b_1(i)$, где $b_1(i) = b(i) + \lambda_1^{(1)}(i)$, если $\lambda_1^{(1)}(i) < 0$; и $b_1(i) = b(i)$ в противном случае. Легко видеть, что $b_1(i) \geq i - 1$, поскольку иначе в противоречие с нашими рассуждениями оценка соответствующего слагаемого убывала бы быстрее, чем правая часть (48). Следовательно, $b_1(i) \geq 1 > b_1(1)$ при $i = 2, \dots, \tilde{l}$. Следовательно, если $m = [n^{\alpha}]$ и $[\alpha < \alpha_0]$, то $m^{b_1(i)} n^{-1/2}$ убывает медленнее, чем $\frac{m^{b_1(i)}}{(\sqrt{n})^i}$ при $i > 1$. Затем, выбрав α так, чтобы $m^{b_1(i)} n^{-1/2}$ и m^{-1} имели одинаковый порядок, получим, что оценка (5) верна при $a = a_2$, где $a_2 > a_1 > a_0 = 1/3$.

Затем по a_2 тем же методом получаем a_3 , потом a_4 , и т. д. По индукции доказывается следующая лемма.

Лемма 16. Для $i = 1, 2, \dots$

$$a_{i+1} = R(a_i), \text{ где } R(y) = \frac{\alpha_0}{1 - 2y + 2\alpha_0}.$$

Последовательность $\{a_i\}$ сходится к α_0 при $i \rightarrow \infty$.

Для доказательства оценки (5) при $a = 1/2$ возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $\alpha_0 = (1 - \varepsilon)/2$. По лемме 16 существует k , такое, что $1/2 - a_k < \varepsilon$. Повторяя проведенные в начале настоящего пункта рассуждения k раз, получаем требуемое.

Отметим, что лемма 15 использовалась лишь для получения начального значения a_0 , к которому затем применялся описанный в настоящем пункте процесс «итерации формул». Можно не использовать симметрию шара $T(z)$. Действительно, возьмем α , такое, что $\sqrt{\frac{m^2}{n}}$ и m^{-1} имеют одинаковый порядок, т. е. $\alpha = 1/4$. Получим, что оценка (5) верна при $a = 1/4$ — результат, по порядку совпадающий с наилучшими из полученных другими авторами. Далее проводятся те же рассуждения, что и раньше, с заменой $1/3$ на $1/4$. Лемма 16, разумеется, остается справедливой.

7. Перейдем к доказательству того, что оценка (5) неверна при $a > 1$. Легко подсчитать, что дисперсия ω_n^2 меньше дисперсии ω^2 на $(60n)^{-1}$. Для произвольной функции распределения $F(x)$ выполнено равенство

$$\int_0^a x^2 dF(x) = x^2 F(x) \Big|_0^a - \int_0^a x F(x) dx.$$

Пусть $a = n^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Подставим вместо $F(x)$ функции распределения $P\{\omega_n^2 < x\}$ и $P\{\omega^2 < x\}$ и вычтем одно равенство из другого. Воспользовавшись результатом Ю. В. Прохорова [15] об экспоненциально быстром убывании при $x \rightarrow \infty$ хвостов распределений ω_n^2 и ω^2 , получаем, что разность дисперсий ω_n^2 и ω^2 не превышает $\Delta_n n^{2\varepsilon}$ при достаточно больших n . Поскольку ε сколь угодно мало, то оценка (5) не может быть верна при $a > 1$.

З а м е ч а н и е 1. В работе Н. В. Смирнова [2] рассматривалась случайная величина

$$\Omega^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\eta_j^2}{\lambda_j},$$

где $\{\eta_j\}$ — независимые в совокупности стандартные нормальные величины, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_j < \lambda_{j+1} < \dots$, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1}$ сходится. При $\lambda_j = j^2 \pi^2$ получаем случайную величину ω^2 из (3). В приведенных Н. В. Смирновым разложениях в ряд функций распределения Ω^2 и ω^2 (формулы (97), (109) из [2], повторенные в [6]), к сожалению, пропущен множитель $(-1)^k$. Этот факт отмечался несколькими исследователями независимо друг от друга, в частности, Г. В. Мартыновым и автором. Исправленные формулы оказались полезными для вычислений. Например, они были использованы Г. В. Мартыновым [16]. Приведем исправленную часть доказательства леммы 6 в [2].

Пусть $\varphi(\xi)$ — характеристическая функция Ω^2 . Легко видеть, что

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{D(\lambda)}}, \quad \text{где } \lambda = 2i\xi, \quad D(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right).$$

[В [2] выделяется однозначная ветвь функции $\sqrt{D(\lambda)}$, аналитическая всюду, кроме разрывов по интервалам $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ вещественной оси λ ($k =$

$= 1, 2, \dots$) и такая, что $\sqrt{D(0)} = 1$. Чтобы найти скачки на разрезах этой аналитической ветви, вычислим знак ее мнимой части на полупрямой $x + i\varepsilon$, $x \geq 0$, $\varepsilon > 0$, бесконечномало отстоящей от положительной полуоси. Поскольку

$$D(i\varepsilon) = 1 - i\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} + O(\varepsilon^2),$$

то $D'(0) < 0$ и мнимая часть $\sqrt{D(i\varepsilon)}$ отрицательна. Знак мнимой части $\sqrt{D(x + i\varepsilon)}$ меняется там и только там, где $w(x) = D(x + i\varepsilon)$ пересекает положительную полуось. Справедливо равенство

$$D(x + i\varepsilon) = D(x) + i\varepsilon D'(x) + O(\varepsilon^2).$$

Очевидно, что $D(x) > 0$, если $x < \lambda_1$ или $\lambda_{2k} < x < \lambda_{2k+1}$, и $D(x) < 0$, если $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$. Легко проверить, что $D'(\lambda_{2k-1}) < 0$, а $D'(\lambda_{2k}) > 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Поэтому $D'(x)$ меняет знак нечетное число раз на каждом смежном к множеству разрезов интервале $(\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1})$, где, кроме того, $D(x) > 0$. На $(0, \lambda_1)$ функция $D'(x)$ меняет знак четное число раз. Стало быть, $\operatorname{Im} \sqrt{D(i\varepsilon)}$ и $\operatorname{Im} \sqrt{D(\lambda_1 + i\varepsilon)}$ отрицательны, $\operatorname{Im} \sqrt{D(x + i\varepsilon)}$ не меняет знак при $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$ и меняет знак при переходе от $x = \lambda_{2k}$ к $x = \lambda_{2k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, $\operatorname{Im} \sqrt{D(x + i\varepsilon)} < 0$ при $\lambda_1 < x < \lambda_2$, и вообще $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \sqrt{D(x + i\varepsilon)} = (-1)^k$ при $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$. Кроме того, $\sqrt{D(x + i\varepsilon)}$ и $\sqrt{D(x - i\varepsilon)}$ комплексно сопряжены в силу принципа симметрии [17]. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{D(x + i\varepsilon)} = (-1)^{k_i} \sqrt{-D(x)}$$

при $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$, а скачок аналитической ветви $(\sqrt{D(\lambda)})^{-1}$ на разрезе $\lambda_{2k-1} < x < \lambda_{2k}$ равен

$$-2(-1)^{k_i} (\sqrt{-D(x)})^{-1},$$

где имеется в виду арифметическое значение корня. Это выражение отличается множителем $(-1)^k$ от использованного в [2]. Изменив соответствующие места в рассуждениях [2], получим вместо (97) в [2] следующую формулу для функции распределения случайной величины $\Omega^2(x > 0)$:

$$F(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k}} \frac{e^{-\frac{\lambda x}{2}}}{\sqrt{-D(\lambda)}} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

(Замечание 1 получено совместно с С. А. Пироговым.)

З а м е ч а н и е 2. Разработанный в настоящей работе метод позволяет получать также оценки скорости сходимости статистик типа Колмогорова — Смирнова. Получены [19] оценки типа (5) с $a = 1/4$, что по порядку совпадает с результатами Кифера [14] и Никитина [25], [26].

Автор благодарен В. В. Сазонову за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов, Таблицы математической статистики. М., изд-во «Наука», 1965 (1 изд.), 1968 (2 изд.).
- [2] Н. В. Смирнов, О распределении ω^2 -критерия Мизеса, Матем. сб., 2 (44), 5 (1937), 973—993 (перепечатано в книге: Н. В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды, М., изд-во «Наука», 1970, 60—78).
- [3] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, М., изд-во «Наука», 1965.
- [4] T. W. Anderson, D. A. Darling, Asymptotic theory of certain «goodness of fit» criteria based on stochastic processes, Ann. Math. Statist., 23, 2 (1952), 193—212.
- [5] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., изд-во «Мир», 1967.
- [6] Н. В. Смирнов, Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, Успехи матем. наук, X (1944), 179—206 (перепечатано в книге: Н. В. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды, М., изд-во «Наука», 1970, 133—159).
- [7] V. V. Sazonov, On ω^2 -criterion, Sankhyā, Ser. A, 30, 2 (1968), 205—209.
- [8] В. В. Сазонов, Улучшение одной оценки скорости сходимости, Теория вероят. и ее примен., XIV, 4 (1969), 667—678.
- [9] W. A. Rosenkrantz, A rate of convergence for the von Mises statistic, Trans. Amer. Math. Soc., 139 (1969), 329—337.
- [10] А. И. Орлов, Оценки скорости сходимости к пределу распределений некоторых статистик, Теория вероят. и ее примен., XVI, 3 (1971), 583—584.
- [11] С. Уилкс, Математическая статистика, М., изд-во «Наука», 1967.
- [12] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М., изд-во «Наука», 1966.
- [13] Я. Ю. Никитин, Оценки скорости сходимости в некоторых предельных теоремах и статистических критериях, ДАН СССР, 202, 4 (1972), 758—760.
- [14] J. Kiefer, Skorohod embedding of multivariate RV's and the sample DF, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 24, 1 (1972), 1—35.
- [15] Ю. В. Прохоров, Распространение неравенств С. Н. Бернштейна на многомерный случай, Теория вероят. и ее примен., XIII, 2 (1968), 266—274.
- [16] Г. В. Мартынов, Вычисление предельного распределения статистик критерия нормальности типа ω^2 , Теория вероят. и ее примен., XVIII, 3 (1973), 671—673.
- [17] А. Картан, Элементарная теория аналитических функций одной и нескольких комплексных переменных, М., ИЛ, 1963.
- [18] А. И. Орлов, Предельные теоремы для статистик интегрального типа, Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 25—30 июня, 1973), Тезисы докладов, т. 2, Vilnius, 1973, 137—140.
- [19] А. И. Орлов, Переход от сумм к интегралам и его применения в изучении асимптотических распределений статистик, Теория вероят. и ее примен., XVIII, 4 (1973), 881—883.
- [20] А. Бикялис, Формулы суммирования Эйлера — Маклорена для функций многих переменных, Литовский матем. сб., VIII, 4, (1968), 681—684.
- [21] И. И. Гихман, При одне питання з теорії ω^2 -критерія, Матем. збірник Київськ. держ. ун-ту, 5 (1954), 51—59.
- [22] В. К. Иванов, Многомерные обобщения сумматорной формулы Эйлера, Изв. высш. учебн. завед., матем., 6 (37), 1963, 72—80.
- [23] В. М. Калинин, Предельные свойства вероятностных распределений, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, CIV (1968), 88—134.
- [24] Х. Мансуров, Аналог формулы Эйлера — Маклорена для функций двух переменных, Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 6 (1961), 15—22.
- [25] Я. Ю. Никитин, О граничной задаче для эмпирического процесса, ДАН СССР, 205, 5 (1972), 1043—1046.

- [26] Я. Ю. Никитин, Оценки скорости сходимости в некоторых предельных теоремах и статистических критериях, Канд. дисс. Л., 1973.
- [27] А. И. Орлов, О проверке симметрии распределения, Теория вероят. и ее примен. XVII, 2 (1972), 372—377.
- [28] А. И. Орлов, Необходимые и достаточные условия в предельной теории статистик интегрального типа, Теория вероят. и ее примен., XVIII, 3 (1973), 673—675.
- [29] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., I, 3 (1956), 177—238.
- [30] А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Киев, изд-во КГУ, 1961.
- [31] J. R. Blum, J. Kiefer, M. Rosenblatt, Distribution free test of independence based on the sample distribution function, Ann. Math. Statist., 32 (1961), 485—492.
- [32] D. A. Darling, The Cramer — Smirnov test in the parametric case, Ann. Math. Statist., 26, 1 (1955), 1—20.
- [33] D. A. Darling, The Kolmogorov — Smirnov, Cramer — von Mises tests, Ann. Math. Statist., 28, 4 (1957), 823—838.
- [34] J. L. Doob, Heuristic approach to the Kolmogorov — Smirnov theorems, Ann. Math. Statist., 20 (1949), 393—403.
- [35] М. Кас, J. Kiefer, J. Wolfowitz, On test of normality and other tests of goodness-of fit based on distance methods, Ann. Math. Statist., 26, 2 (1955), 189—211.
- [36] J. Kiefer, K -sample analogues of the Kolmogorov — Smirnov and Cramer — von Mises tests, Ann. Math. Statist., 30, 2 (1959), 420—447.
- [37] E. L. Lehmann, Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests, Ann. Math. Statist., 22, 1 (1951), 165—179.
- [38] C. Müller, Eine Verallgemeinerung der Eulerschen Summenformel und..., Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 19, 1/2 (1954), 41—62.
- [39] M. Rosenblatt, Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic, Ann. Math. Statist., 23, 4 (1952), 617—623.
- [40] E. D. Rothman, M. Woodroffe, A Cramer — von Mises statistic for testing symmetry, Ann. Math. Statist., 43, 6 (1972), 2035—2038.
- [41] E. D. Rothman, Tests for uniformity of a circular distribution, Sankhyā, ser. A, 34, 1 (1972), 23—32.
- [42] E. D. Rothman, Tests of coordinate independence for a bivariate sample on a torus, Ann. Math. Statist., 42, 6 (1971), 1962—1969.
- [43] A. W. Marshall, The small sample distribution of $n\omega_n^2$, Ann. Math., Statist., 29 (1958), 307—309.

THE RATE OF CONVERGENCE OF THE MISES—SMIRNOV STATISTIC'S DISTRIBUTION

A. I. ORLOV (MOSCOW)

(Summary)

We consider n independent random variables with a continuous distribution function $F(x)$ and empirical distribution function $F_n(x)$. Put

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x),$$

and

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega_n^2 < z\},$$

$$\Delta_n = \sup_{-\infty < z < \infty} |P\{\omega_n^2 < z\} - S(z)|.$$

Many papers dealt with the estimate: For each $\varepsilon > 0$, there exists a $b(\varepsilon)$ such that

$$\Delta_n < b(\varepsilon) n^{-a+\varepsilon} \quad (1)$$

for $n = 1, 2, \dots$.

The inequality (1) is proved for $a = 1/10$ [7], $a = 1/6$ [8], $a = 1/4$ [9], $a = 1/3$ [10]. In the present paper, we obtain (1) for $a = 1/2$.